Integrált Intetnzív Matematika Érettségi

III. rész

1. Adott az $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ függvény. **a)** Számítsd ki az f függvény deriváltját! **b)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait! **c)** Igazold, hogy $f(x)\le -4$ bármely $x<-1$ esetén !

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-e^{-x}$ függvény. **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ határértéket! **b)** Igazold, hogy az f függvény növekvő $\mathbb{R}$-en! **c)** Számítsd ki: $S=g(0)+g(1)+...+g(2009)$, ahol $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)-f''(x)$.

3. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, bármely $x\in(0;+\infty)$ esetén! **b)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait! **c)** Igazold, hogy $3^{\sqrt{5}}\le 5^{\sqrt{3}}$.

4. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$ függvény. **a)** Számítsd ki: $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$. **b)** Igazold, hogy f csökkenő a $(-\infty,0]$ intervallumon és növekvő a $[0,+\infty)$ intervallumon! **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képe ferde aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!

5. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2009}-2009(x-1)-1$ függvény. **a)** Számítsd ki az $f(0)+f'(0)$ összeget! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A(0;1)$ pontban húzott érintő egyenletét! **c)** Igazold, hogy az f függvény konvex a $[0,+\infty)$ intervallumon!

6. Adott az $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$ függvény. **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ határértéket! **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ határértéket! **c)** Bizonyítsd be, hogy $\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 2$ bármely $x\in[0,+\infty)$ esetén!

7. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2$ függvény. **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ határértéket! **b)** Bizonyítsd be , hogy az f függvénynek nincs aszimptotája a $+\infty$ felé! **c)** Bizonyítsd be , hogy az f függvény konvex $\mathbb{R}$-en!

8. Adott az $f:(0,+\infty)\setminus\{e\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$ függvény. **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ határértéket! **b)** Igazold, hogy $f'(x)=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$, bármely $x\in(0;+\infty)\setminus\{e\}$ esetén! **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!

9. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(ax^2+bx+c)$ függvény, ahol $a,b,c\in\mathbb{R}$. **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ határértéket, ha $a=1,\ b=c=0$. **b)** Igazold, hogy $f'(0)-f(0)=b$. **c)** Határozd meg az $a,b,c\in\mathbb{R}$ számokat, ha $f(0)=0,\ f'(0)=1$ és $f''(0)=4$.

10. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\ge 1\\ -x^2+x, & x<1\end{cases}$ függvény. **a)** Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0=1$ pontban! **b)** Számítsd ki az $f'(0)+f'(2)$ összeget! **c)** Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(-\infty;1)$ intervallumon!

11. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{(x+1)^3}$, bármely $x\in(0,\infty)$ esetén! **b)** Igazold, hogy az f függvény csökkenő a $(0,+\infty)$ intervallumon! **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3f'(x)$ határértéket!

12. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$ függvény. **a)** Számítsd ki: $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$. **b)** Igazold, hogy az f függvény konvex a $(0,+\infty)$ intervallumon! **)** Igazold, hogy $f(x)\ge\ln\dfrac{e^2}{4}$, bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén!

13. Adott az $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$, bármely $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ esetén! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe aszimptotájának egyenletét a $-\infty$ felé! **c)** Bizonyítsd be, hogy $f(x)\geq 1$, bármely $x>-1$ esetén.

14. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ függvény. **a)** Számítsd ki: $f'(e)$. **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé! **c)** Bizonyítsd be, hogy $x^e\leq e^x$ bármely $x>0$ esetén!

15. Adottak az $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=e^{-x}-1$, $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$ függvények minden $n\in\mathbb{N}$ esetén. **a)** Számítsd ki: $f_1(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}$. **b)** Határozd meg az f_0 függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé! **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_2(x)+x-1}{x^2}$ határértéket!

16. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0 \\ x^2+x+a, & x\geq 0\end{cases}$ függvény, ahol $a\in\mathbb{R}$. **a)** Határozd meg $a\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az $x_0=0$ pontban! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A\left(-1;\frac{1}{e}-1\right)$ pontban húzott érintő egyenletét! **c)** Igazold, hogy az f' függvény csökkenő a $(0;+\infty)$ intervallumon, bármely $a\in\mathbb{R}$ esetén!

17. Adott az $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}^*$. **b)** Bizonyítsd be, hogy az f függvény csökkenő a $(0,2]$ intervallumon! **c)** Igazold, hogy $2e^{\sqrt{3}}\leq 3e^{\sqrt{2}}$.

18. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=4x$ bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén! **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ határértéket! **c)** Határozd meg a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ függvény monotonitási intervallumait!

19. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ függvény. **a)**. Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,\infty)$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ határértéket! **c)** Bizonyítsd be, hogy $0<f(x)\leq\frac{1}{2e}$, bármely $x\in\left[\sqrt{e},+\infty\right)$ esetén!

20. Adott az $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in[0,1]$. **b)** Igazold, hogy az f függvény növekvő a $[0;1]$ intervallumon! **c)** Bizonyítsd be, hogy $\frac{3}{e}\leq\frac{1}{f(x)}\leq 2$, bármely $x\in[0,1]$ esetén!

21. Adott az $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, bármely $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ esetén! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe ferde aszimptotájának egyenletét $+\infty$ felé! **c)** Igazold, hogy $f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\geq 8$, bármely $x>1$ esetén!

22. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,\infty)$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)}{f'(x)}$ határértéket! **c)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

23. Adott az $f:\square \to \square$, $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)e^x$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\square$. **b)** Határozd meg az f függvény szélsőértékpontjait! **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)$ határértéket!

24. Adott az $f:(0,+\infty)\to\square$, $f(x)=\frac{x^4}{4}-\ln x$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,\infty)$. **b)** Határozd meg az f függvény szélsőértékpontját! **c)** Bizonyítsd be, hogy $\ln\sqrt{x}\le\frac{x^2-1}{4}$ bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén!

25. Adott az $f:\square \to \square$, $f(x)=e^x-x$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\square$. **b)** Bizonyítsd be, hogy $f(x)\ge 1$, bármely $x\in\square$ esetén! **c)** Írd fel az f függvény grafikus képe ferde aszimptotájának egyenletét $-\infty$ felé!

26. Adott az $f:\check{} \to \check{}$, $f(x)=e^x-x-1$ függvény. **a)** Számítsd ki az f függvény deriváltját! **b)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait! **c)** Igazold, hogy $e^{x^2}+e^x\ge x^2+x+2$, bármely $x\in\square$ esetén!

27. Adott az $f:(0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,\infty)$. **b)** Határozd az f függvény monotonitási intervallumait! **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét!

28. Adott az $f:\check{} \to \check{}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}\cdot e^x-1, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$ függvény. **a)** Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0=1$ pontban! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe aszimptotájának egyenletét $-\infty$ felé! **c)** Igazold, hogy az f függvény konkáv az $(1,+\infty)$ intervallumon!

29. Adott az $f:(0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=x-\ln x$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f(1)-f'(1)=1$. **b)** Határozd meg az f függvény szélsőértékpontját! **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{x}$ határéteket!

30. Adott az $f:\check{} \to \check{}$, $f(x)=x^2+e^x$ függvény. **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ határértéket! **b)** Igazold, hogy az f függvény konvex az $\check{}$ -en! **c)** Oldd meg a valós számok halmazán az $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$ egyenletet!

31. Adott az $f:(0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=x^2\ln x$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=x(2\ln x+1)$, bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén! **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x\ln x}$ határéteket! **c)** Bizonyítsd be, hogy $f(x)\ge-\frac{1}{2e}$, bármely $x>0$ esetén!

32. Adott az $f:\check{} \to \check{}$, $f(x)=x-\frac{1}{e^x}$ függvény. **a)** Számítsd ki az $f(0)+f'(0)$ összeget! **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+f'(x)}{x}$ határértéket! **c)** Igazold, hogy az f függvény konkáv az $\check{}$ -en!

33. Adott az $f:[0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=1-\frac{2e^x}{x+e^x}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$, bármely $x\in[0,+\infty)$ esetén! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé! **c)** Igazold, hogy $-1\le f(x)\le\frac{1-e}{1+e}$, bármely $x\ge 0$ esetén!

34. Adott az $f:\check{} \to \check{}$, $f(x)=(x^2+2x+3)e^x$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\check{}$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ határértéket! **c)** Bizonyítsd be, hogy az f' függvény növekvő az $\check{}$ -en!

35. Adott az $f:(0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=x\sqrt{x}-3x$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}-6}{2}$, bármely $x\in(0;+\infty)$ esetén! **b)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait! **c)** Igazold, hogy $-4\le f(x)+f\left(x^2\right)\le 0$, bármely $x\in(0;1]$ esetén!

36. Adott az $f:\check{}\to\check{}$, $f(x)=\left(x^2-3x-3\right)e^x$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\square$. **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét $-\infty$ felé! **c)** Igazold, hogy az f függvény grafikus képéhez az $(-2, f(-2))$ koordinátájú pontban húzott érintő párhuzamos az Ox tengellyel!

37. Adott az $f:[1,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=\frac{x-\ln x}{x+\ln x}$ függvény. **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ határértéket! **b)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}$, bármely $x\in[1,+\infty)$ esetén! **c)** Határozd meg a $g:[1,+\infty)\to\check{}$, $g(x)=\frac{f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}$ függvény grafikus képének $+\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét!

38. Adott az $f:\check{}\to\check{}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, bármely $x\in\check{}$ esetén!

b) Határozd meg az f függvény montonitási intervallumait. **c)** Számítsd ki a

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\mathrm{K}+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}$$ határértéket, ha $g:\check{}^{*}\to\check{}$, $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

39. Adott az $f:(0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=\ln x-x+1$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,\infty)$. **b)** Határozd meg az f függvény szélsőértékpontját! **c)** Igazold, hogy $2-e\le f(2)\le 0$.

40. Adott az $f:(0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,+\infty)$. **b)** Határozd meg az f grafikus képéhez az $A(1;0)$ pontban húzott érintő egyenletét! **c)** Számítsd ki $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x}$ határértéket!

41. Adott az $f:(1,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(1;+\infty)$. **b)** Igazold, hogy az $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$. **c)** Igazold, hogy az f függvény csökkenő az $(1,+\infty)$ intervallumon!

42. Adott az $f:\check{}\to\check{}$, $f(x)=x^{2010}+2010^x$ függvény. **a)** Határozd meg $f'(x)$-et, ha $x\in\check{}$. **b)** Igazold, hogy az f függvény konvex az $\check{}$ -en. **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$ határértéket!

43. Adott az $f:\check{}\to\check{}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ függvény. **a)** Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét! **b)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, bármely $x\in\check{}$ esetén! **c)** Bizonyítsd be, hogy $\frac{2}{3}\le f(x)+f\left(x^2\right)\le 4$ bármely $x\in\check{}$ esetén!

44. Adott az $f:\check{}\to\check{}$, $f(x)=x^2+e^x$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(0)=1$. **b)** Igazold, hogy az f függvény konvex az $\check{}$ -en! **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{e^x}$ határéteket!

45. Adottak az $f,g:\check{}\to\check{}$, $f(x)=(x-1)e^x$ és $g(x)=xe^x$ függvények. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=g(x)$, bármely $x\in\square$ esetén! **b)** Határozd meg a g függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét! **c)**

Ha $I \subseteq \check{}$ egy intervallum, akkor igazold, hogy a g függvény akkor és csak akkor növekvő az I intervallumon, ha az f függvény konvex az I intervallumon!

46. Adott az $f:(0;+\infty)\to\check{}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & x\in(0;1) \\ 1+\ln x, & x\geq 1 \end{cases}$ függvény. **a)** Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0=1$ pontban! **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ határértéket! **c)** Igazold, hogy $f(x)\geq\frac{3}{4}$, bármely $x>0$ esetén!

47. Adott az $f:[1,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=x-2\ln x$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(1,\infty)$. **b)** Igazold, hogy $\ln\frac{2010}{2009}\leq\frac{1}{2}$. **c)** Bizonyítsd be az $x^2-x\leq 2\ln x$ egyenlőtlenséget, bármely $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ esetén, felhasználva, hogy $1\leq x\leq x^2\leq 2$ bármely $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ esetén!

48. Adott az $f:(0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}$, bármely $x>0$ esetén! **b)** Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\geq f(x)$, bármely $x\in(1;+\infty)$ esetén! **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,f(x)\,f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ határértéket!

49. Adott az $f:(0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=(x-2)\ln x$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,\infty)$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ határértéket! **c)** Igazold, hogy az f' függvény növekvő a $(0,+\infty)$ intervallumon!

50. Adott az $f:\check{}\to\check{}$, $f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x}, & x\geq 0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$ függvény. **a)** Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0=0$ pontban! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét! **c)** Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(0,+\infty)$ intervallumon!

51. Adott az $f:\square\to\square$, $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x\leq 1 \\ \ln x, & x>1 \end{cases}$ függvény. **a)** Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0=1$ pontban! **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ határértéket! **c)** Számítsd ki az $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(e^x\right)+f\left(e^{x^2}\right)+\ldots+f\left(e^{x^{2009}}\right)}{x^{2009}}$ határértéket!

52. Adott az $f:\square\to\square$, $f(x)=\begin{cases} ax-6, & x<4 \\ \sqrt{x}, & x\geq 4 \end{cases}$ függvény, ahol a valós paraméter. **a)** Számítsd ki az a valós számot úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az $x_0=4$ pontban. **b)** Számítsd ki $f'(9)$-et! **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A(9,3)$ pontban húzott érintő egyenletét!

53. a) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}$ határértéket! **b)** Határozd meg az $f:\square\to\square$, $f(x)=x^4-6x^2+18x+12$ függvény konvexitási és konkavitási intervallumait. **c)** Adott a $g:(0,+\infty)\to\square$, $g(x)=\left(x^2-1\right)\ln x$ függvény. Igazold, hogy $g(x)\geq 0$, bármely $x\in(0;+\infty)$ esetén!

54. Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ és $g(x)=\frac{x-1}{e^x}$ függvények. **a)** Igazold, hogy $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=0$. **b)** Számítsd ki az f függvény szélsőértékpontjának koordinátáit! **c)** Igazold, hogy $g(x)-f(x)\le 1+\frac{1}{e^2}$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén!

55. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3^x+1, & x\le 1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$ függvény. **a)** Határozd meg az a valós paramétert úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az $x_0=1$ pontban! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató vízszintes aszimptotájának egyenletét! **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot x\right)$ határértéket!

56. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$ függvény. **a)** Számítsd ki a $f'(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f''(x)}$ határértéket! **c)** Igazold, hogy $e^{\sqrt{2009}}+\sqrt{2010}\le e^{\sqrt{2010}}+\sqrt{2009}$.

57. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=e^x-ex-1$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}$. **b)** Igazold, hogy az f függvény konvex az $\mathbb{R}$-en! **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $O(0,0)$ pontban húzott érintő egyenesnek az $x=1$ egyenletű egyenessel való metszéspontjának koordinátáit.

58. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,+\infty)$. **b)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait! **c)** Igazold, hogy $\sqrt{x}\ge\ln\sqrt{x}+1$ bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén!

59. Adott az $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ határértéket. **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képe $+\infty$ felé mutató vízszintes aszimptotáját!

60. a) Tanulmányozd az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ 2x-1, & x\ge 1\end{cases}$ függvény folytonosságát az $x_0=1$ pontban! **b)** Számítsd ki a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^3-15x^2+24x-1$ függvény deriváltját! **c)** Határozd meg azt az a pozitív valós számot, amelyre $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=32$.

61. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x-x\ln 2$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ határértéket! **c)** Határozd meg az f függvény szélsőértékpontját!

62. Adott az $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ határértéket! **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képének vízszintes aszimptotáját a $+\infty$ felé!

63. Adott az $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in[1,+\infty)$. **b)** Tanulmányozd az f függvény monotonitását az $[1,+\infty)$ intervallumon! **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A(1,e)$ pontban húzott érintő egyenletét!

64. Adottak az $f,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ és $h(x)=f^2(x)$ függvények. **a)** Igazold, hogy $h'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, bármely $x\ge 0$ esetén! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képea $+\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét! **c)** Igazold, hogy a h függvény növekvő a $[0,+\infty)$ intervallumon!

65. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}$. **b)** Határozd meg az f függvény szélsőértékpontjait! **c)** Bizonyítsd be, hogy $f(x)+f(x^3)\geq -2$ bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén!

66. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+2}, & x\geq 0\\ x+\dfrac{3}{2}, & x<0\end{cases}$ függvény. **a)** Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0=0$ pontban! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe $+\infty$ felé mutató vízszintes aszimptotájának egyenletét! **c)** Igazold, hogy $f(x)\in\left[\dfrac{3}{2},2\right)$, bármely $x\in[0,\infty)$ esetén!

67. Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+4$ és $g(x)=x^3-5x^2+8x-4$ függvények. **a)** Számítsd ki az $f'(x)-g'(x)$ különbséget, ha $x\in\mathbb{R}$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ határértéket! **c)** Bizonyítsd be, hogy $f(x)\geq 0$, bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén!

68. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x$ függvény. **a)** Számítsd ki az - $f'(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}$. **b)** Igazold, hogy az f függvény növekvő $\mathbb{R}$-en! **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$ határértéket!

69. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{x^2}{2}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,\infty)$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ határértéket! **c)** Határozd meg az f függvény konvexitási és konkavitási intervallumait!

70. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in(0,+\infty)$. **b)** Igazold, hogy az f függvény növekvő a $(0,+\infty)$ intervallumon! **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képén található azon pont koordinátáit, amelyben a grafikus képhez húzott érintő iránytényezője $\dfrac{3}{2}$.

71. Adottak az $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, bármely $n\in\mathbb{R}^*$ függvények, ahol $f_0(x)=\ln x$ és $f_n(x)=f'_{n-1}(x)$. **a)** Határozd meg az f_1 függvényt! **b)** Határozd meg az f_2 függvény grafikus képe $+\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét! **c)** Igazold, hogy az $f_0(x)\leq\dfrac{1}{f_1(x)}-1$, bármely $x\in(0,+\infty)$ esetén!

72. Adott az $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$ függvény. **a)** Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in\mathbb{R}^*$. **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ határértéket! **c)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

73. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x^2+1}, & x\leq 1\\ \dfrac{2x+a}{x^2+2}, & x>1\end{cases}$ függvény, ahol $a\in\mathbb{R}$. **a)** Határozd meg az a valós számot úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az $x_0=1$ pontban! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató vízszintes aszimptotájának egyenletét! **c)** Határozd meg az a valós számot úgy, hogy a grafikus képhez a $(2;f(2))$ pontban húzott érintő iránytényezője 1 legyen.

1. Adott az $f:\square\to\square$, $f(x)=\begin{cases}x^2+e^x, & x\le 0\\ \sqrt{x}+1, & x>0\end{cases}$ függvény. **a)** Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye $\square$ -en! **b)** Számítsd ki $\int_{-1}^{0} x\,f(x)\,dx$. **c)** Számítsd ki a $g:[0;1]\to\square$, $g(x)=f(x)$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

2. Adottak az $f,F:\square\to\square$, $f(x)=xe^x$ és $F(x)=(x-1)e^x$ függvények. **a)** Igazold, hogy az F függvény az f függvény-nek egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenesek által határolt síkidom területét! **c)** Bizonyítsd be, hogy

$\int_{1}^{x}\frac{f(t)f''(t)-\left(f'(t)\right)^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$ bármely $x>1$ esetén!

3. Adott az $f:\square\to\square$, $f(x)=\begin{cases}e\cdot e^x, & x\le -1\\ 2+x, & x>-1\end{cases}$ függvény. **a)** Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye $\square$ -en. **b)** Számítsd ki a $g:[0,2]\to\square$, $g(x)=f(x)$, $x\in[0,2]$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát! **c)** Számítsd ki az $\int_{-2}^{0}\frac{x\,f(x)}{e}dx$ integrál értékét!

4. Adott a $g:\square\to\square$, $g(x)=(x+1)^3-3x^2-1$ függvény. **a)** Számítsd ki $\int_{0}^{1}g(x)dx$. **b)** Számítsd ki az $a>1$ valós számot, ha $\int_{1}^{a}\left(g(x)-x^3\right)\cdot e^x dx=6e^a$. **c)** Számítsd ki $\int_{0}^{1}\left(3x^2+3\right)\cdot g^{2009}(x)dx$.

5. Adott az $f:\square\to\square$, $f(x)=x+e^{-x}$ függvény. **a)** Számítsd ki az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenesek által határolt síkidom területét! **b)** Ismertnek tekintjük az $x^2+e^{-x^2}\ge 1,\ \forall\, x\in\square$ egyenlőtlenséget. Ennek felhasználásával igazold, hogy $\int_{0}^{1}e^{-x^2}dx\ge\frac{2}{3}$. **c)** Számítsd ki a $g:[0,1]\to\square$, $g(x)=f(x)+f(-x)$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

6. Adott az $f:\square\to\square$, $f(x)=x^2+e^x+1$ függvény. **a)** Igazold, hogy az f függvény bármely primitív függvénye növekvő $\square$ -en. **b)** Számítsd ki $\int_{0}^{1}x\,f(x)dx$. **c)** Igazold, hogy $\int_{1}^{e}\frac{f(\ln x)}{x}dx=e+\frac{1}{3}$.

7. Adott az $f:[1,+\infty)\to\square$, $f(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}$ függvény. **a)** Számítsd ki az $\int_{1}^{e}f'(x)dx$ értékét! **b)** Igazold, hogy az f függvény bármely primitív függvénye növekvő az $[1,+\infty)$ intervallumon! **c)** Határozd meg az $a\in\left(1,e^2\right)$ valós számot úgy, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=a$ és $x=e^2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $\ln\frac{3}{2}$ legyen.

8. Adottak az $f,g:(0,+\infty)\to\square$, $f(x)=e^x$ és $g(x)=\frac{1}{x}$ függvények. **a)** Határozd meg az $f+g$ függvény primitív

függvényeinek halmazát. **b)** Igazold, hogy $\int_1^2 (f^2(x)+g^2(x))\,dx=\frac{e^4-e^2+1}{2}$. **c)** Ismertnek tekintjük az

$2ab\le a^2+b^2$,

$\forall a,b\in$ egyenlőtlenséget. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy $\int_1^2 e^x\cdot\frac{1}{x}\,dx\le\frac{e^4-e^2+1}{4}$.

9. Adottak az $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}\,dx$ integrálok, ahol $n\in\mathbb{N}^*$ **a)** Számítsd ki az I_1 integrált! **b)** Igazold, hogy $I_2\le I_1$, felhasználva esetleg, hogy $x^2\le x$, bármely $x\in[0,1]$ esetén! **c)** Bizonyítsd be, hogy $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}+2\ln 2$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

10. Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ és $g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$ függvények. **a)** Igazold, hogy a g függvény az f függvénynek egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. **c)** Igazold, hogy

$\int_0^1 f'(x)g'(x)dx=\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

11. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$ függvény. **a)** Számítsd ki az $\int_1^e(f(x)-\frac{\ln x}{x})\,dx$ értékét! **b)** Igazold, hogy $\int_1^e f(x)\,dx=\frac{e^2}{2}$. **c)** Igazold, hogy az $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)-x)\,dx,\ n\ge 1$ általános taggal meghatározott sorozat egy olyan számtani haladvány, amelynek állandó különbsége 1.

12. Adottak az $f_m:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=m^2x^2+(m^2-m+1)x+1$ függvények, ahol $m\in\mathbb{R}$. **a)** Számítsd ki $\int f_1(x)\,dx$. **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 e^x f_0(x)\,dx$ értékét! **c)** Határozd meg az $m\in\mathbb{R}^*$ paramétert úgy, hogy $\int_0^1 f_m(x)\,dx=\frac{3}{2}$ legyen!

13. Adottak az $I_n=\int_e^{e^2}\frac{\ln^n x}{x}dx$, integrálok minden $n\in\mathbb{N}$ esetén. **a)** Igazold, hogy $I_0=1$. **b)** Számítsd ki az I_1 integrált! **c)** Ismert, hogy $1\le\ln x\le 2$, bármely $x\in[e,e^2]$ esetén. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy $1\le\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\le 2^n$, bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén!

14. Adott az $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ függvény. **a)** Számítsd ki $\int_0^4 f^2(x)\,dx$. **b)** Igazold, hogy $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{x}{f(x)}dx=0$. **c)** Igazold, hogy $0\le\int_0^m f(x)dx\le 8$, bármely $m\in[0,2]$ esetén!

15. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\sqrt{x^2+1}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=e-1$. **b)** Számítsd ki a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=xe^{-x}f(x)$ függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenesek által határolt síkidom területét! **c)** Számítsd ki $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)\,dx$.

16. Adottak az $I_n=\int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx,\quad n\in\mathbb{N}$ integrálok. **a)** Igazold, hogy $I_0=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **b)** Számítsd ki I_1.

c) Bizonyítsd be, hogy $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$ bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén!

17. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x$ függvény. **a)** Számítsd ki az $\int_1^2 (x-f(x)+\ln x)^2\,dx$ értékét! **b)** Igazold, hogy az f függvény bármely F primitív függvénye konkáv az $(1,+\infty)$ intervallumon! **c)** Számítsd ki a $h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)+x$ függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=1$ és $x=e$ egyenesek által határolt síkidom területét!

18. Adott az $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x$ függvény. **a)** Igazold, hogy $\int g(x)dx=g(x)+C,\ x>0$, ha $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\ln x$. **b)** Számítsd ki $\int_1^e f(x)dx$. **c)** Igazold, hogy $\int_1^e xf(x^2)dx=\frac{e^{e^2}+e^2-e+1}{2}$.

19. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$ függvény. **a)** Számítsd ki az $\int_1^e x\left(f(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$ értékét! **b)** Igazold, hogy az f függvény bármely primitív függvénye növekvő a $(0,+\infty)$ intervallumon! **c)** Igazold, hogy $\int_1^2 f'(x)f(x)dx=-\frac{22}{81}$.

20. Adottak az $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$ és $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ függvények. **a)** Igazold, hogy $F(x)=-f(x)+1$ bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén! **b)** Bizonyítsd be, hogy a $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=F(x)-f(x)$ függvény konkáv az $\mathbb{R}$-en. **c)** Számítsd ki $\int_0^1 x\cdot f(x^2)dx$ értékét!

21. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x+3^{-x}$ függvény. **a)** Számítsd ki az $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ értékét! **b)** Számítsd ki a $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=3^{-x}$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát! **c)** Igazold, hogy az f függvény bármely F primitív függvénye konkáv a $(-\infty,0]$ intervallumon és konvex a $[0,+\infty)$ intervallumon!

22. Adott az $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$ függvény. **a)** Számítsd ki az $\int_2^e\left(f(x)-\frac{1}{x-1}\right)dx$ értékét! **b)** Igazold, hogy az f függvény bármely F primitív függvénye konkáv a $[2;+\infty)$ intervallumon! **c)** Határozd meg az $a>2$ valós szám értékét úgy, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=2$ és $x=a$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $\ln 3$ legyen!

23. Adottak az $f,F:[1,+\infty)\to\square$, $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ és $F(x)=(x+1)\ln x-x+1$ függvények. **a)** Igazold, hogy az F függvény az f egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki az $\int_1^2 f(e^x)dx$ értékét! **c)** Igazold, hogy $\int_1^2 f(x)F(x)dx=\frac{(3\ln 2-1)^2}{2}$.

24. Adott az $I_n=\int_1^2 x^n e^x dx$, $n\in\square$ integrál. **a)** Számítsd ki I_0 értékét! **b)** Igazold, hogy $I_1=e^2$. **c)** Igazold, hogy $(n+1)I_n+I_{n+1}=e\left(2^{n+1}e-1\right)$ bármely $n\in\square$ esetén!

25. Adott az $f:\square\to\square$, $f(x)=x^3+mx^2+nx+p$ függvény, ahol $m,n,p\in\square$. **a)** Számítsd ki az $\int_0^1 f(x)dx$ értékét, ha

$m=0,\ n=-3,\ p=2$. **b)** Határozd meg $m,n,p\in\square$, ha $f'(-1)=f'(1)=0$ és $\int_{-1}^1 f(x)dx=4.$ **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)dt$ határértéket!

26. Adottak az $f,g:(0,+\infty)\to\check{}$, $f(x)=1+\ln x$ és $g(x)=x\ln x$ függvények. **a)** Igazold, hogy a g függvény az f függvény egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$ értékét! **c)** Számítsd ki a g függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=1$ és $x=e$ egyenesek által határolt síkidom területét!

27. Adott az $f:\check{}\to\check{}$, $f(x)=x^{1004}+2009^x$ függvény. **a)** Számítsd ki $\int f(x)dx$ értékét! **b)** Igazold, hogy az f függvénynek minden primitív függvénye növekvő az $\check{}$ -en! **c)** Számítsd ki az $\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx$ értékét!

28. Adott az $f:\check{}\to\check{}$, $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ függvény. **a)** Számítsd ki: $\int\left(x^2+1\right)\cdot f(x)\,dx$. **b)** Igazold, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln(2e)$. **c)** Igazold, hogy $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e(e-1)$.

29. Adott az $I=\int_0^1\frac{e^x}{x+1}dx$ és a $J=\int_0^1\frac{xe^x}{x+1}dx$ integrál. **a)** Igazold, hogy $I+J=e-1$. **b)** Ismert az $e^x\ge x+1$ egyenlőtlenség bármely $x\in\check{}$ esetén. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy $J\ge\frac{1}{2}$. **c)** Igazold, hogy $I=\frac{e-2}{2}+\int_0^1\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$.

30. Adottak az $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n\,dx$ integrálok, bármely n természetes szám esetén. **a)** Számítsd ki I_1 értékét! **b)** Ismert az $(1+x)^n\le(1+x)^{n+1}$, $\forall n\in\square$, $\forall x\in[0,1]$ egyenlőtlenség. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy

$I_{2009} \geq I_{2008}$. **c)** Ismert az $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$, $\forall n \in \square$, $\forall x \in \square$ azonosság. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy $I_n = \dfrac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$.

31. Adott az $f: \check{} \to \check{}$, $f(x) = xe^x$ függvény. **a)** Számítsd ki $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx$ értékét! **b)** Igazold, hogy $\int_0^1 f''(x)\,dx = 2e - 1$. **c)** Számítsd ki $\int_1^2 \dfrac{f(x^2)}{x}\,dx$ értékét!

32. Adottak az $f, g: [0,1] \to \check{}$, $f(x) = 1 - x$, $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + x^{2008} - x^{2009}$ függvények. **a)** Határozd meg az f függvény primitív függvényeinek halmazát! **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát! **c)** Igazold, hogy $\int_0^1 (x+1)g(x)\,dx < 1$.

33. Adott az $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{x+1}\,dx$ integrál, minden $n \in \square^*$ természetes szám esetén. **a)** Számítsd ki I_1 értékét! **b)** Igazold, hogy $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$, bármely $n \in$ Ą* esetén! **c)** Ismert az $\dfrac{x^n}{2} \leq \dfrac{x^n}{x+1} \leq x^n$ $\forall n \in \square^*$, $\forall x \in [0,1]$ egyenlőtlenség. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy $\dfrac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1$.

34. Adottak az $f, g: (0, +\infty) \to \check{}$, $f(x) = x^2 + x\ln x$ és $g(x) = 2x + \ln x + 1$ függvények. **a)** Igazold, hogy az f függvény a g függvénynek egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki az $\int_1^e f(x) \cdot g(x)\,dx$ értékét! **c)** Határozd meg az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = 1$ és $x = e$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

35. Adottak az $f, F: \check{} \to \check{}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$ és $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$ függvények. **a)** Igazold, hogy az F függvény az f függvénynek egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) \cdot F(x)\,dx$ értékét! **c)** Igazold, hogy $\int_0^1 \left(xf(x) + F(x)\right)dx = F(1)$.

36. Adott az $f: \check{} \to \check{}$, $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ e^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ függvény. **a)** Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye az $\square$-en! **b)** Számítsd ki az $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ értékét! **c)** Igazold, hogy $\int_0^1 xf(x^2)\,dx = \dfrac{e}{2}$.

37. Adottak az $f, g: \check{} \to \check{}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ és $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ függvények. **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 f'(x)\,dx = \ln 2$. **b)** Bizonyítsd be, hogy $\int g(x)\,dx = f(x) + C$. **c)** Számítsd ki az $\int_1^2 \dfrac{g(x)}{f^2(x)}\,dx$ értékét!

38. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén adott az $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$ integrál. **a)** Számítsd ki I_0 értékét! **b)** Igazold, hogy $I_n \le I_{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén! **c)** Igazold, hogy az $I_n = \frac{e^2\left(e^2 \cdot 2^n - 1\right)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$ összefüggés teljesül, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

39. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \ge 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$ függvény. **a)** Számítsd ki az $\int_1^2 f(x)\,dx$ értékét! **b)** Határozd meg az $a \in (0,1)$ számot, ha $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 1$. **c)** Számítsd ki: $\int_0^1 x f\left(e^x\right) dx$.

40. Adottak az $f, F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ és $F(x) = x - \ln x$ függvények. **a)** Igazold, hogy az F függvény az f függvénynek egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki az $\int_1^2 F(x) \cdot f(x)\,dx$ értékét! **c)** Határozd meg az F függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = 1$ és $x = e$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

41. Adottak az $f, g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$ és $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$ függvények. **a)** Igazold, hogy $\int_1^4 f(x)\,dx = \ln 4 + 2$. **b)** Igazold, hogy $\int_1^4 g(x)\,dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$. **c)** Számítsd ki: $\int_1^e f\left(x^2\right) \cdot g\left(x^2\right) dx$.

42. Adottak az $f, g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\left(x^2+1\right)}$ és $g(x) = \frac{1}{x}$ függvények. **a)** Igazold, hogy $\int_1^e g(x)\,dx = 1$. **b)** Számítsd ki az $\int_1^e f(x)\,dx$ értékét, felhasználva az $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2+1}$, $\forall x > 0$ azonosságot! **c)** Igazold, hogy $\ln \frac{e^2+1}{2} \ge \frac{e+1}{e}$, felhasználva az $f(x) \le \frac{1}{2x^2}$ egyenlőtlenséget, mely igaz bármely $x \in [1,e]$ esetén!

43. Adott az $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$ függvény. **a)** Számíts ki az $\int_1^e f(x)\,dx$ integrált! **b)** Igazold, hogy az f függvény bármely primitív függvénye konvex a $(0,+\infty)$ intervallumon. **c)** Bizonyítsd be, hogy a $g, h : [1,e] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ és $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ függvények grafikus képeinek Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástestek térfogatai egyenlők!

44. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$ függvény. **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx = e - \frac{3}{2}$. **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 x \cdot f(x)\,dx$ értékét! **c)** Igazold, hogy ha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az f függvénynek egy primitív függvénye, akkor $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx = F(2) - F(1)$.

45. Adottak az $f, g:[1,+\infty)\to$ ˇ , $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ és $g(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ függvények. **a)** Igazold, hogy f egy primitív függvé-nye a g -nek! **b)** Számítsd ki az $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$ értékét! **c)** Határozd meg az $a\in(1;+\infty)$ valós számot, ha $\int_1^a f(x)dx=2$.

46. Adottak az $f,g:(1,+\infty)\to$ ˇ , $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ és $g(x)=x\ln x$ függvények. **a)** Igazold, hogy $\int_1^2 f(x)dx=2\ln 2+\frac{7}{3}$. **b)** Igazold, hogy $\int_1^2 g(x)dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$. **c)** Igazold, hogy létezik $x_0\in(1;2)$ úgy, hogy $f(x_0)>g(x_0)+3$.

47. Adottak az $I_n=\int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx$ integrálok, bármely $n\in$ Ą esetén. **a)** Igazold, hogy $I_0=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **b)** Számítsd ki: I_1. **c)** Bizonyítsd be, hogy $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, bármely $n\in$ Ą esetén!

48. Adottak az $I_n=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n\left(x^2+1\right)}dx$ integrálok, ahol $n\in$ Ą. **a)** Igazold, hogy $I_0+I_2=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$. **b)** Határozd meg I_1-et, felhasználva az $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ azonosságot, mely igaz bármilyen $x\neq 0$ esetén! **c)** Igazold, hogy $I_n+I_{n-2}<\frac{1}{n-1}$, bármely $n\in$ Ą, $n\geq 2$ esetén!

49. Adottak az $f, g:(0,+\infty)\to$ ˇ , $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ és $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2}{2x}$ függvények. **a)** Igazold, hogy az f függvény a g függvénynek egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki az $\int_1^4 f(x)\cdot g(x)dx$ értékét! **c)** Bizonyítsd be, hogy $\int_1^4 g(x)\cdot f''(x)dx=-1$.

50. Adottak az $f, g:$ ˇ $\to$ ˇ , $f(x)=e^{x^2}$ és $g(x)=x$ függvények. **a)** Számítsd ki: $\int f\left(\sqrt{x}\right)dx$. **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$ értékét! **c)** Igazold, hogy $\int_0^1 f\left(x^{50}\right)\cdot g^{99}(x)dx=\frac{e-1}{100}$.

51. Adottak az $f,F:$ □ $\to$ □ , $f(x)=e^x+x^2+2x$ és $F(x)=e^x+\frac{x^3}{3}+x^2+1$ függvények . **a)** Igazold, hogy az F függ-vény az f függvénynek egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 f(x)\,dx$ értékét! **c)** Számítsd ki a $h:[0,1]\to$ □ , $h(x)=\frac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$ függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

52. $n \in \square$ esetén értelmezzük az $f_n : [0,\infty) \to \square$, $f_0(x) = 1$ és $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$ függvényt. **a)** Számítsd ki $f_1(x)$-et, ha $x \in [0,\infty)$. **b)** Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 f_1(x) \cdot \ln x\, dx = \frac{e^2+1}{4}$. **c)** Számítsd ki $g : [0,1] \to \square$, $g(x) = f_2(x)$, $x \in [0,1]$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

64. Adott az $f : [0,+\infty) \to \square$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1$ függvény. **a)** Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 (x+1)(x+2) f(x) dx = \frac{22}{3}$. **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 f(x)\, dx$ értékét! **c)** Határozd meg a k pozitív valós számot úgy, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = 0$ és $x = k$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $k + \ln k$ legyen!

65. Adott az $f : \square \to \square$, $f(x) = x + 2$ függvény. **a)** Számítsd ki az $\int_0^1 f(x)\, dx$ értékét! **b)** Számítsd ki $\int_0^1 e^x f(x)\, dx$ értékét! **c)** Határozd meg a p valós számot úgy, hogy a $h : [0,1] \to \square$, $h(x) = f(px)$, $\forall x \in [0,1]$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogata minimális legyen!

66. a) Számítsd ki az $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}\, dx$ értékét! **b)** Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx \le 1$. **c)** Adott az $f : (0,\infty) \to \square$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény és az a, b és c szigorúan pozitív valós számok. Igazold, hogy ha az $\int_1^a f(x)\, dx$, $\int_1^b f(x)\, dx$, $\int_1^c f(x)\, dx$ számok egy számtani haladvány három egymás utáni tagja, akkor az a, b, c számok egy mértani haladvány egymásutáni tagjai!

67. Adottak az $f, F : (0,\infty) \to \square$, $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$ és $F(x) = e^x + x - \ln x$ függvények. **a)** Igazold, hogy az F függvény az f függvénynek egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki az $\int_1^2 x\left(F(x) - x + \ln x\right) dx$ értékét! **c)** Határozd meg a m valós paramétert úgy, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = 1$ és $x = e$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $e^m - 2$ legyen!

68. Adott az $f : \square \to \square$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x \in (-\infty, 1] \\ \ln x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ függvény. **a)** Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye $\square$-en! **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 (x-2) f(x) dx$ értékét! **c)** Számítsd ki a $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \left(f(t) + 2\right) dt$ határértéket!

69. Adott az $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^n$, $n\in\mathbb{R}^*$ függvény. **a)** Számítsd ki $n=2$ esetén az $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right)dx$ integrált! **b)** Határozd meg $n=-1$ esetén az $a\in[0;+\infty)$ számot, ha $\int_0^a f(x)dx=0$. **c)** Számítsd ki az $\int_0^1 f'(x)f(x)\,dx$ értékét!

70. Adott az $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $\int(x+1)(x+2)f(x)dx=x^2+3x+C$, ha $x\geq 0$. **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 f(x)\,dx$ értékét! **c)** Számítsd ki a $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-f(x+1)-\frac{1}{x+1}$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

71. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ függvény. **a)** Számítsd ki az $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)\,dx$ értékét! **b)** Bizonyítsd be, hogy az f függvény bármely primitív függvénye növekvő a $(0,+\infty)$ intervallumon! **c)** Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx>\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$.

72. Adott az $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$ függvény. **a)** Számítsd ki az f függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát! **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 f(x)\,dx$ értékét!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$ határértéket!

73. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ függvény. **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=e-1$. **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 x\,f(x)dx$ értékét! **c)** Bizonyítsd be, hogy $1\leq\int_0^1 f(x)dx\leq e$.

74. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2009}+x+1$ függvény. **a)** Számítsd ki a $h:[1,3]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-x^{2009}-1$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát! **b)** Határozd meg az *f* függvény azon $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitív függvényét, amelyre $F(0)=1$. **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^{2010}}$ határértéket!

75. Adottak az $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^n}$ függvények, bármely $n\in\mathbb{R}^*$ esetén. **a)** Igazold, hogy $\int_1^e f_1\left(\sqrt{x-1}\right)dx=1$. **b)** Határozd meg a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$ függvény azon G primitív függvényét, amelyre teljesül a $G(1)=\dfrac{13}{15}$ egyenlőség! **c)** Számítsd ki az $\int_0^1 x\cdot f_n(x)\,dx$ értékét $n\in\mathbb{R}$, $n\geq 2$ esetén!

76. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x-2, & x<1\\ (x+1)\ln x, & x\geq 1\end{cases}$ függvény. **a)** Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye az $\mathbb{R}$ -en! **b)** Igazold, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx=-\dfrac{7}{6}$. **c)** Számítsd ki a $h:[1;e]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{x+1}$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

77. Adottak az $F,f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=x\cdot e^x$ és $f(x)=(x+1)e^x$ függvények. **a)** Igazold, hogy az F függvény az f függvénynek egy primitív függvénye! **b)** Számítsd ki az F függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét! **c)** Számítsd ki az $\int_0^1 \dfrac{F(x)-f(x)}{e^x+1}\,dx$ értékét!

78. Adottak az $f,g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^x$ és $g(x)=x\cdot 2^x$ függvények. **a)** Számítsd ki $\int f(x)\,dx$. **b)** Határozd meg a g függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét! **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ határértéket!

79. Adottak az $f_n:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{x+1}$ függvények, bármely $n\in\mathbb{R}^*$ esetén. **a)** Számítsd ki $\int_1^{\frac{1}{2}}(x+1)\cdot f_2(x)dx$ értékét! **b)** Határozd meg az f_1 függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét. **c)** Igazold, hogy $\int_0^1 f_{2009}(x)\,dx\leq\ln 2$.

80. Adottak az $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\dfrac{e^x}{e^{nx}+1}$ függvények, bármely $n\in\mathbb{R}$ esetén. **a)** Számítsd ki $\int f_0(x)\,dx$, ha $x\in\mathbf{R}$. **b)** Határozd meg az f_1 függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét! **c)** Igazold, hogy $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx\leq\int_0^1 f_n(x)\,dx$, bármely $n\in\mathbf{N}$ esetén!